ANALYSIS

Integralrechnung 5

Partielle Integration

Datei Nr. 48015

Stand 18. Februar 2018

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Stoff-Verteilung zur Integration

Grundniveau - Gymnasium

Datei Nr. 48011 Teil 1	Einführung in die Grundlagen: Änderungen und Differenziale Lineare Änderungen / Nicht-lineare Änderungen Lineare Änderungen auf der Tangente - Differenzialbegriff Das unbestimmte Integral – Stammfunktionen - Grundintegral 1
Datei Nr. 48012 Teil 2:	Integrationsregeln Unbestimmte Integrale für ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen mit vielen Substitutionsarten. Umfangreiches Übungsmaterial
Datei Nr. 48013 Teil 3	Das bestimmte Integral für Potenzfunktionen, ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen, auch mit Substitution.
Datei Nr. 48014 Teil 4	Integration von Wurzelfunktionen (1)
Datei Nr. 48030	Grundniveau für einfache Anforderungen: Gemischtes Trainingsheft Gründlichen Wiederholen und Trainieren: Potenzfunktionen, Rationale Funktionen, Wurzel-, Exponential- und Trigonometrische Funktionen.
Datei Nr. 48015 Teil 5	Partielle Integration: alles
Datei Nr. 45041 Teil 6	Exponentialfunktionen alles
Datei Nr. 46041 Teil 7	Ln-Funktionen alles
Datei Nr. 48016 Teil 8	Trigonometrische Funktionen alles
Datei Nr. 48040	Lernblatt: Die wichtigsten Integrale

Höheres Niveau (Studium)

Gebrochen rationalen Funktionen:

Datei Nr. 48050	Integrationsmethoden - Übersicht
Datei Nr. 48051	Integration mit Partialbruchzerlegung
Datei Nr. 48052	Reduktionsformel bzw. Umgekehrte partielle Integration
Datei Nr. 48055	Integration mit arctan-Funktionen
Datei Nr. 48062	Sammlung schwerer Integrale

Datei Nr. 48056	Integration von Wurzelfunktionen (2) mit arcsin-Funktionen
Datei Nr. 48070	Integration von Wurzelfunktionen (3): Substitutionen mit sin und sinh
Datei Nr. 48057	Integration der Arkusfunktionen
Datei Nr. 48061	Schwierige Integrale Aufgabensammlung

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Hinweis:

Die **Methode der partiellen Integration** kommt bei verschiedenen Funktionstypen vor.

Sie wird ferner in folgenden Texten erklärt:

45041 für Exponentialfunktionen,

46041 für Logarithmusfunktionen,

48016 für trigonometrische Funktionen

Inhalt

1 **Herleitung der Formel** $\int_a^b u'v\,dx = [u\cdot v]_a^b - \int_a^b v'u\,dx$ 4

2 **Anwendung bei Exponentialfunktionen** 5

$\int_0^2 x\cdot e^x dx$, $\int_1^2 x\cdot e^{-x}\,dx$, $\int_{-1}^3 2x\cdot e^{x+1}dx$, $\int_0^4 (4-x)\cdot e^{x/2}dx$ 5-10

Zweifache partielle Integration: $\int_{-1}^1 x^2\cdot e^{-x}dx$ 11

Trainingsaufgaben 1 12

3 **Anwendungen bei Logarithmusfunktionen** 13

Beispiele: $\int_1^e x\cdot\ln x\,dx$, $\int_1^{e^2} x^2\cdot\ln x\,dx$, $\int_a^b \ln x\,dx$, $\int_1^e (\ln x)^2\,dx$

$\int_0^3 x\cdot\ln(4-x)\,dx$, $A = \int_{-2}^0 x^2\cdot\ln(x+3)dx$ 13-18

Substitution **<u>und</u>** partielle Integration 19-21

Trainingsaufgaben 2 22

4 **Anwendungen bei trigonometrischen Funktionen** 23

Beispiele: $\int_{2\pi}^{3\pi} x\cdot\sin x\,dx$, $\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$, $\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx$ 23-27

Zweifache partielle Integration: $\int_0^{\pi} e^x\cdot\sin x\,dx$, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x\cdot\cos x\,dx$ 28-29

Trainingsaufgaben 3 30

Anhang 1: Berechnung von $\int\sin^4(t)dt$ und $\int\sin^6(t)dt$ 31

Anhang 2: Berechnung von $\int\sqrt{x^2+1}\;dx$ 32

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Methode der Partiellen Integration

1 Herleitung der Formel

Da sich viele Stammfunktionen nicht berechnen lassen, haben die Mathematiker viele Methoden und Tricks ersonnen, um diese Probleme doch noch zu knacken. Die wohl berühmteste aller Methoden wird jetzt vorgestellt. Mit ihr erreicht man, dass bestimmte komplizierte Integrale in einfachere umgewandelt werden können.

Zu Herleitung benötigen wir die Produktregel der Ableitung:

Aus $y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

folgt $y' = f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$.

Die Regel zu Berechnung eines Differenzials lautet:

$$dy = y' \cdot dx$$

Also folgt: $dy = y' \cdot dx = (u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x))dx$

Kurz: $dy = (u' \cdot v + v' \cdot u)dx$

Nun gehen wir ganz formal vor und machen mit dem Integral die Berechnung des Differenzials rückgängig: $y = \int dy = \int (u'v + v'u)dx = \int u'v\,dx + \int v'u\,dx$

Daraus folgt: $\int u'v\,dx = y - \int v'u\,dx$ bzw. $\int u'v\,dx = [u \cdot v] - \int v'u\,dx$

Was wir jetzt rein formal als unbestimmtes Integral gezaubert haben, spielt sich in der Praxis beim bestimmten Integral so ab:

$$\boxed{\int_a^b u'v\,dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v'u\,dx}$$

Wer diese Formel zum ersten Male sieht, denkt vielleicht an Asterix und Obelix.
Diese Gleichung sieht nicht vertrauenerweckend aus. Man muss ihren Aufbau verstehen, dann kann man sie auch anwenden:

Auf der linken Seite steht das zu berechnende schwere Integral.

Der Integrand besteht aus einem Produkt. Den einen Faktor interpretieren wir als eine Ableitung u', den anderen als eine „normale“ Funktion v.

Auf der rechten Seite steht eine Formel, in der auch u, v und v' vorkommen und ein neues Integral beinhaltet.

Wenn es gelingt, die Faktoren u' und v so zu finden, dass das auf der rechten Seite entstehende zweite Integral leichter berechenbar ist als das gegebene auf der linken Seite, dann schafft es diese Formel, ein kompliziertes Integral in ein einfacheres zu verwandeln!!!

Es gibt viele Fälle, in denen sich diese Formel bewährt. Diese Gleichung trägt übrigens verschiedene Namen: **Produktintegration** oder auch **Partielle Integration** sind die beiden gebräuchlichsten.

Demo-Text für www.mathe-cd.de